

TEMA 3

ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

ÍNDICE

1. POSTULADOS DEL ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

2. ÁLGEBRA DE BOOLE BIVALENTE O ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

2.1 Teoremas del álgebra de conmutación

3. VARIABLES Y FUNCIONES BINARIAS

4. EXPRESIONES DE CONMUTACIÓN

4.1 Expresiones normales

4.2 Forma canónica disyuntiva

4.2.1 Notación-m

4.2.2 Primer teorema de expansión

4.3 Forma canónica conjuntiva

4.3.1 Notación-M

4.3.2 Segundo teorema de expansión

5. FUNCIONES DE CONMUTACIÓN INCOMPLETAS

5.1 Función inespecificación

6. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

7. PRIMITIVAS LÓGICAS : CONJUNTOS COMPLETOS

POSTULADOS DEL ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

El Álgebra de Boole es una estructura algebraica definida por dos operadores binarios ($+$ y \bullet) de tal forma que satisfacen los siguientes postulados :

P1 : POSTULADO DEL CIERRE

(a) Si $x, y \in B$ entonces $x + y \in B$

(b) Si $x, y \in B$, entonces $x \bullet y \in B$

P2 : POSTULADO DE LOS ELEMENTOS DE IDENTIDAD

(a) Un elemento de identidad con respecto al operador $+$ es designado por el símbolo 0 y cumple:

$$x + 0 = 0 + x = x \quad \text{siendo } x \in B$$

(b) Un elemento de identidad con respecto al operador \bullet es designado por el símbolo 1 y cumple :

$$x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$$

P3 : PROPIEDAD CONMUTATIVA

(a) Conmutatividad con respecto al operador $+$

$$x + y = y + x$$

(b) Conmutatividad con respecto al operador \bullet

$$x \bullet y = y \bullet x$$

P4 : PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

(a) Distributividad con respecto al operador $+$

$$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$$

(b) Distributividad con respecto al operador \bullet

$$x + (y \bullet z) = (x + y) \bullet (x + z)$$

P5 : AXIOMAS DEL COMPLEMENTO

(a) $x + x' = 1$

(b) $x \bullet x' = 0$

P6 : Existen al menos dos elementos $x, y \in B$ tal que $x \neq y$

CARACTERÍSTICAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- 1) En este álgebra, el significado de los operadores $+$, \bullet son distintos de la aritmética clásica. Llama la atención el hecho de que aparezca la propiedad distributiva del operador $+$ sobre \bullet .
- 2) En los postulados no aparecen inversos de los operadores $+$ y \bullet .
- 3) Se dispone de un operador nuevo como es el complemento.
- 4) Los postulados del álgebra han sido listados a pares, parte (a) y parte (b). Una parte puede obtenerse a partir de la otra mediante el intercambio de los elementos unitarios (0 y 1) y los operadores binarios ($+$ y \bullet). Esto se conoce como el Principio de dualidad, gracias al cual, cualquier apartado de los postulados puede obtenerse a partir del otro sin más que intercambiar los operadores binarios y los elementos unitarios.

2. ÁLGEBRA DE BOOLE BIVALENTE O ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

\Rightarrow El álgebra de conmutación se obtiene haciendo que el conjunto B de elementos sean sólo 2, el 0 y el 1, y definiendo los operadores binarios $+$ y \bullet y el operador complemento, de la siguiente forma :

x	x'
0	1
1	0

Tabla 1

x	y	$X+y$ (operación OR)	$x \bullet y$ (operación AND)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Tabla 2

Cumplimiento del postulado P1 : El conjunto B, formado sólo por el 0 y el 1, es cerrado, ya que en la tabla 2 se puede ver que el resultado de $x+y$, $x \bullet y$ (también 0 o 1) pertenece a B.

Cumplimiento del postulado P2: Usando la tabla 2 se puede demostrar que $x+0=x$.

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

De igual forma, de la columna del producto lógico de la tabla 2 se deduce que $x \bullet 1 = x$.

x	y	$x \bullet y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cumplimiento del postulado P3:

a) $x+y=y+x$

x	y	$y+x$	$x+y$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

b) $x \bullet y = y \bullet x$

x	y	$x \bullet y$	$y \bullet x$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Cumplimiento del postulado P4 :

(a) $x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$

x	y	z	$x \bullet y$	$x \bullet z$	$x \bullet y + x \bullet z$	$y+z$	$x \bullet (y+z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b) $x+(y \bullet z) = (x+y) \bullet (x+z)$

x	y	z	$x+y$	$x+z$	$(x+y) \bullet (x+z)$	$y \bullet z$	$x+(y \bullet z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Cumplimiento del postulado P5 : De la definición del operador complemento (Tabla 1), se deduce que

x	x'	$x+x'$	$x \bullet x'$
0	1	1	0
1	0	1	0

$$\begin{aligned} x+x' &= 1 \\ x \bullet x' &= 0 \end{aligned}$$

Cumplimiento del postulado P6: El álgebra de conmutación ha definido dos elementos distintos: el 0 y el 1, que son los elementos identidad respecto al operador OR y AND respectivamente.

2.1 Teoremas del álgebra de conmutación

T1 : TEOREMA DE IDEMPOTENCIA

$$(a) x + x = x$$

$$(b) x \bullet x = x$$

T2 : TEOREMA DE LOS ELEMENTOS DOMINANTES

$$(a) x + 1 = 1$$

$$(b) x \bullet 0 = 0$$

T3 : LEY INVOLUTIVA

$$(x')' = x$$

T4 : TEOREMA DE ABSORCIÓN

$$(a) x + x \bullet y = x$$

$$(b) x \bullet (x + y) = x$$

T5 : TEOREMA DEL CONSENSO

$$(a) x + (x' \bullet y) = x + y$$

$$(b) x \bullet (x' + y) = x \bullet y$$

T6 : TEOREMA ASOCIATIVO

$$(a) x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(b) x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$$

T7 : LEYES DE MORGAN

$$(a) (x + y)' = x' \bullet y'$$

$$(b) (x \bullet y)' = x' + y'$$

Ley de Morgan generalizada

$$(a) (x + y + z + \dots)' = x' \bullet y' \bullet z' \bullet \dots$$

$$(b) (x \bullet y \bullet z \bullet \dots)' = x' + y' + z' + \dots$$

Demostraciones de los teoremas del álgebra de conmutación

Demostración del teorema T1:

(a) $x + x = x$

x	$x+x$
0	$0+0=0$
1	$1+1=1$

(b) $x \bullet x = x$

x	$x \bullet x$
0	$0 \bullet 0 = 0$
1	$1 \bullet 1 = 1$

Demostración del teorema T2

a) $x + x = x$

x	$x+1$
0	$0+1=1$
1	$1+1=1$

(b) $x \bullet 0 = 0$

x	$x \bullet 0$
0	$0 \bullet 0 = 0$
1	$1 \bullet 0 = 0$

Demostración del teorema T3

x	x'	$(x')'$
0	1	0
1	0	1

Demostración del teorema T4 :

a) $x = x + x \bullet y$

x	y	$x \bullet y$	$x + x \bullet y$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

(b) $x \bullet (x + y) = x$

Queda demostrado por dualidad.

Demostración del teorema T5:

(a) $x + (x' \bullet y) = x + y$

x	y	$x + y$	x'	$x' \bullet y$	$x + x' \bullet y$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

(b) $x \bullet (x' + y) = x \bullet y$

Por dualidad queda demostrado.

Demostración del teorema T6 :

(a) $x + (y+z) = (x+y)+z$

x	y	z	(y+z)	$x+(y+z)$	(x+y)	$(x+y)+z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

(b) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

Por dualidad queda demostrado.

Demostración del teorema T7 :

(a) $(x+y)' = x' \bullet y'$

x	y	x+y	$(x+y)'$	x'	y'	$x' \bullet y'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

(b) $(x \bullet y)' = x' + y'$

Por dualidad queda demostrado.

3. VARIABLES Y FUNCIONES BINARIAS

Se denominan también variables y funciones de conmutación o lógicas

Una *variable binaria (de conmutación o lógica)* es un símbolo (normalmente una letra con algún subíndice, o sin él) al cual se le puede asignar el valor lógico 0 o el valor lógico 1.

Una *función binaria (de conmutación o lógica)* de n variables es una regla que marca o asocia un valor binario (1 o 0) a cada una de las posibles combinaciones binarias de las n variables. En la siguiente tabla se representa un caso de una función binaria f de dos variables x e y .

x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

De un modo más formal se puede afirmar que *una función de conmutación de n variables es una aplicación del conjunto B^n en B*

$$f: B^n \rightarrow B$$

donde $B^n = B_1 \times B_2 \times B_3 \times \dots \times B_n$ es el producto cartesiano de los conjuntos de elementos del álgebra de conmutación, y un elemento perteneciente a dicho producto cartesiano, $x \in B^n$, se compone de una n -tupla $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

La definición de una función de conmutación de n variables sugiere que esta pueda ser representada por una tabla de $n+1$ columnas, de las cuales las n primeras representan los valores de las variables binarias, y la última el valor de la función para cada combinación. Esta tabla de combinaciones se denomina tabla de verdad.

x_1	x_2	x_3	...	x_n	$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$
0	0	0	...		$f(0, 0, 0, \dots, 0)$
0					
0	0	0	...		$f(0, 0, 0, \dots, 1)$
1					
.....					

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & f(1,1,1,\dots,1) \\ 1 & & & & \end{array}$$

Se dice que una función de conmutación es completa cuando esta se encuentra definida (o toma el valor de 0 o 1) para toda combinación de entrada. En cambio una función de conmutación es incompleta cuando existen combinaciones de entrada que no definen un valor concreto de la función.

Existen 2^{2^n} funciones de conmutación completas de n variables. En la siguiente tabla se muestran las 16 funciones de conmutación distintas de 2 variables ($n=2$)

x y	F ₀	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀	F ₁₁	F ₁₂	F ₁₃	F ₁₄	F ₁₅
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

F₀ = 0 ;Es la función constante 0

F₁ = $x \bullet y$; Es la función AND

F₂ = $x \bullet y'$

F₃ = x ; Es la función transferencia

F₄ = $x' \bullet y$

F₅ = y ; Es la función transferencia

F₆ = $x' \bullet y + x \bullet y'$; Es la función EXOR que se representa también como $x \oplus y$

F₇ = $x+y$; Es la función OR

F₈ = $x' \bullet y' = (x+y)'$; Es la función NOR

F₉ = $x' \bullet y' + x \bullet y$; Es la función NEXOR

F₁₀ = y' ; Es la función NOT

F₁₁ = $x + y'$

F₁₂ = x' ; Es la función NOT

F₁₃ = $x' + y$

F₁₄ = $(x \bullet y)'$; Es la función NAND

F₁₅ = 1 ; Es la función constantes 1

4. EXPRESIONES DE CONMUTACIÓN

⇒ Una expresión de conmutación de n variables consiste en un número finito de constantes (0, 1) y variables conectados por los operadores (+), (\bullet) y ($'$) de forma que (+) y (\bullet) no pueden estar adyacentes nunca.

Ejemplos : $x + y \bullet z'$
 $a \bullet [(a + b \bullet c)' + b]$

⇒ Cada expresión de conmutación de n -variables describe una única función de conmutación de n -variables.

Dos expresiones de conmutación A y B se dicen equivalentes ($A=B$) si ellas describen la misma función de conmutación

Ejemplo : Sea $f = a + b \bullet c'$ y $g = (a + b) \bullet (a + b' + c')$

a	b	c	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

f y g son equivalentes porque describen la misma función de conmutación.

4.1 Expresiones normales

⇒ Se define un literal como una variable que aparece complementada o sin complementar en una fórmula de conmutación

⇒ Se llama término producto a un literal o producto (conjunción) de literales

⇒ Se llama término suma a un literal o suma (disyunción) de literales

⇒ Una expresión de conmutación que se representa como un simple término producto o suma de ellos se llama **expresión normal disyuntiva o suma de productos**

⇒ Una expresión de conmutación que se representa como un simple término suma o producto de ellos se llama **expresión normal conjuntiva o producto de sumas**

4.2 Expresión canónica disyuntiva o suma de mintérminos

⇒ La expresión normal disyuntiva se define como un término producto o suma de ellos.

$$F(a,b,c) = a \bullet b \bullet c + a \bullet b' \bullet c' + a' \bullet b' \bullet c$$

⇒ Cada término producto de la expresión anterior contiene todas las variables de la función. Un término producto con esta propiedad se llama **mintérmino** o **producto estándar**. Una fórmula consistente sólo de mintérminos en la que no aparezcan dos iguales se dice que está en **forma canónica disyuntiva**.

⇒ Existen 2^n mintérminos de n variables

$X'_1 \bullet X'_2 \bullet X'_3$	$X_1 \bullet X'_2 \bullet X'_3$
$X'_1 \bullet X'_2 \bullet X_3$	$X_1 \bullet X'_2 \bullet X_3$
$X'_1 \bullet X_2 \bullet X'_3$	$X_1 \bullet X_2 \bullet X'_3$
$X'_1 \bullet X_2 \bullet X_3$	$X_1 \bullet X_2 \bullet X_3$

⇒ Dada una lista completa de los mintérminos de n-variables, si a cada una de las n-variables se le asigna el valor 0 o 1, entonces sólo un mintérmino de la lista tomará el valor 1 y los otros el 0.

⇒ Toda función de conmutación puede expresarse en forma canónica de mintérminos.

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

$$F = x' \bullet y \bullet z' + x' \bullet y \bullet z + x \bullet y' \bullet z + x \bullet y \bullet z$$

⇒ La expresión en suma de mintérminos de una función de conmutación es única.

⇒ Toda expresión de conmutación completa puede ser descrita en forma de suma de mintérminos.

4.2.1 Notación –m

⇒ La notación m simboliza de forma simplificada los mintérminos de una función.

Mintérmino	Entrada binaria asociada	Notación-m
$x'_1 \bullet x'_2 \bullet x'_3$	0 0 0	m_0
$x'_1 \bullet x'_2 \bullet x_3$	0 0 1	m_1
$x'_1 \bullet x_2 \bullet x'_3$	0 1 0	m_2
$x'_1 \bullet x_2 \bullet x_3$	0 1 1	m_3
$x_1 \bullet x'_2 \bullet x'_3$	1 0 0	m_4
$x_1 \bullet x'_2 \bullet x_3$	1 0 1	m_5
$x_1 \bullet x_2 \bullet x'_3$	1 1 0	m_6
$x_1 \bullet x_2 \bullet x_3$	1 1 1	m_7

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, x_3) &= x'_1 \bullet x'_2 \bullet x'_3 + x'_1 \bullet x_2 \bullet x'_3 + x'_1 \bullet x_2 \bullet x_3 + x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 = \\
 &= m_0 + m_2 + m_3 + m_7 = \sum m(0, 2, 3, 7) = \Sigma(0, 2, 3, 7)
 \end{aligned}$$

4.2.2 El primer teorema de expansión

Apartado a:

Cualquier función de conmutación completa de n variables puede expresarse como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1} \bullet f(0, x_2, \dots, x_n) + x_1 \bullet f(1, x_2, \dots, x_n)$$

donde las funciones $f(0, x_2, \dots, x_n)$ y $f(1, x_2, \dots, x_n)$ se denominan funciones residuo de f para $x_1=0$ y $x_1=1$ respectivamente.

Apartado b:

Cada función de conmutación completa puede escribirse como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f(i) \bullet m_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde $f(i)$ es el valor que toma la función f para la entrada decimal i , y $m_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ el mintérmino asociado a dicha entrada i .

4.3 Forma canónica conjuntiva o producto de maxtérminos

⇒ La fórmula normal conjuntiva se define como un término suma o producto de ellos.

$$F(a,b,c) = (a+b+c) \bullet (a+b'+c') \bullet (a'+b'+c)$$

⇒ Un término suma que contenga todas las variables de la función se llama **maxtérmino** o **suma estándar**. Una fórmula consistente sólo de maxtérminos en la que no aparezcan dos iguales se dice que está en **forma canónica conjuntiva**.

⇒ Existen 2^n maxtérminos de n variables

$x_1+x_2+x_3$	$x'_1+x_2+x_3$
$x_1+x_2+x'_3$	$x'_1+x_2+x'_3$
$x_1+x'_2+x_3$	$x'_1+x'_2+x_3$
$x_1+x'_2+x'_3$	$x'_1+x'_2+x'_3$

⇒ Dada una lista completa de los máx términos de n-variables, si a cada una de las n-variables se le asigna el valor 0 o 1, entonces sólo un maxtérmino de la lista tomará el valor 0 y los otros el 1.

⇒ Toda función de conmutación puede expresarse en forma canónica de maxtérminos

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

$$F = (x+y+z) \bullet (x+y+z') \bullet (x'+y+z) \bullet (x'+y'+z)$$

⇒ La expresión en producto de maxtérminos de una función de conmutación es única.

⇒ Toda expresión de conmutación completa puede ser descrita en forma de producto de maxtérminos.

4.3.1 Notación –M

⇒ La notación M simboliza de forma simplificada los maxtérminos de una función.

Maxtérmino	Entrada binaria asociada	Notación-M
$x_1+x_2+x_3$	0 0 0	M_0
$x_1+x_2+x'_3$	0 0 1	M_1
$x_1+x'_2+x_3$	0 1 0	M_2
$x_1+x'_2+x'_3$	0 1 1	M_3
$x'_1+x_2+x_3$	1 0 0	M_4
$x'_1+x_2+x'_3$	1 0 1	M_5
$x'_1+x'_2+x_3$	1 1 0	M_6
$x'_1+x'_2+x'_3$	1 1 1	M_7

Ejemplo:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \bullet (x_1 + x'_2 + x'_3) \bullet (x'_1 + x_2 + x'_3) \bullet (x'_1 + x'_2 + x'_3) \\ = M_0 M_3 M_5 M_7 = \prod M(0, 3, 5, 7) = \prod (0, 3, 5, 7)$$

4.3.2. El segundo teorema de expansión

Apartado a:

Cualquier función de conmutación completa de n variables puede

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1 + f(0, x_2, \dots, x_n)] \cdot [\bar{x}_1 + f(1, x_2, \dots, x_n)]$$

expresarse como

donde las funciones $f(0, x_2, \dots, x_n)$ y $f(1, x_2, \dots, x_n)$ se denominan funciones residuo de f para $x_1=0$ y $x_1=1$ respectivamente.

Apartado b:

Cada función de conmutación completa puede escribirse como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} [f(i) + M_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

donde $f(i)$ es el valor que toma la función f para la entrada decimal i, y $M_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ el maxtérmino asociado a dicha entrada i. Dicho de otra forma, cualquier función de conmutación completa de n variables puede expresarse como el producto de la suma de lo que evalúa la función f para cada entrada y el maxtérmino asociado a dicha entrada.

5. FUNCIONES DE CONMUTACIÓN INCOMPLETAS

Ejemplo

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	-
1	0	0	0
1	0	1	-
1	1	0	0
1	1	1	1

5.1 Función inespecificación

⇒ Para describir matemáticamente una función incompleta, es necesario introducir una función que nos indique el dominio de la misma. Esta función se denomina función **inespecificación** o función **no importa** y se representa por $d(x,y,..)$.

x	y	z	d
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

⇒ Matemáticamente debemos acompañar las dos expresiones para representar una función incompleta.

Ejemplo

$$F(x,y,z) = \sum(0,1,7) + d(3,5)$$

$$F(x,y,z) = \prod(2,4,6) \bullet d(3,5)$$

6. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Las funciones de conmutación incompletas son aquellas que no están definidas para todo el conjunto de combinaciones de entradas. En la siguiente las entradas en las que F no está definida se ha puesto un guión ('-').

Ejemplo

x y z	F
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	-
1 0 0	0
1 0 1	-
1 1 0	0
1 1 1	1

Para describir matemáticamente una función incompleta, es necesario introducir una función que nos indique el dominio de la misma. Esta función se denomina función **inespecificación** o función **no importa** y se representa por $d(x,y,..)$.

6. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Las funciones de conmutación pueden ser representadas usando 4 métodos diferentes, algunos de los cuales ya hemos estudiado anteriormente.

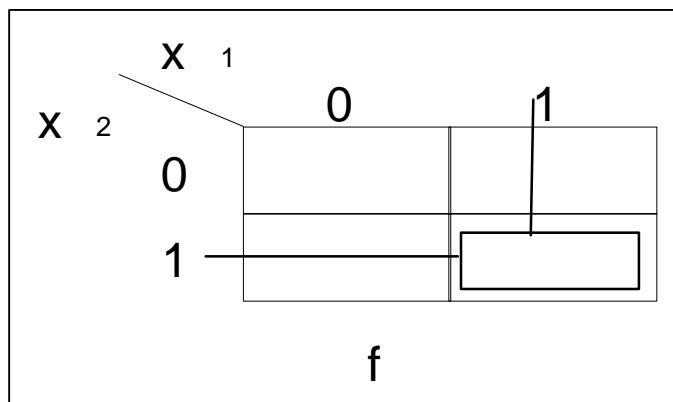
⇒ Fórmula de conmutación

⇒ Tabla de verdad

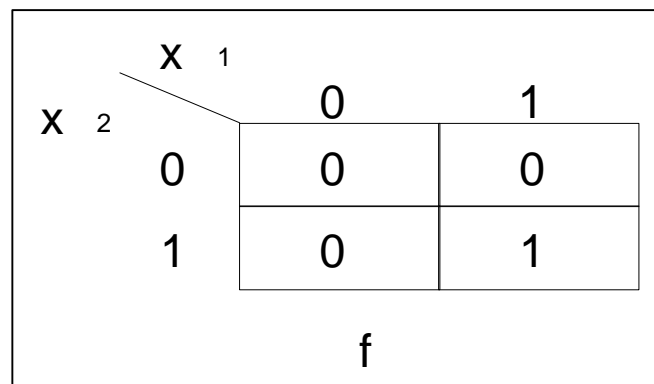
⇒ Mapa de Karnaugh (K-mapa)

El mapa de Karnaugh es un diagrama hecho de cuadros. Cada cuadro representa el valor que toma la función para una combinación de entrada

- Mapas de 2 variables



Por ejemplo, la representación en K-mapa de la función $f = x_1 + x_2$ sería



- Mapas de 3 variables

		$X_1 X_2$			
		00	01	11	10
X_3	0				
	1				

Ejemplo: Representar la función $f = \Pi(0,4,6)$

		$X_1 X_2$			
		00	01	11	10
X_3	0	0	1	0	0
	1	1	1	1	1

- Mapas de 4 variables

		$X_1 X_2$			
		00	01	11	10
$X_3 X_4$	00				
	01				
	11				
	10				

Ejemplo: Represente la función $f = \Sigma(1,2,3) + d(5,10)$

$X_3 X_4$ \ $X_1 X_2$		$X_1 X_2$			
		00	01	11	10
00		0	0	0	0
01		1	--	0	0
11		1	0	0	0
10		1	0	0	--

- Mapas de 5 variables

$X_4 X_5$ \ $X_1 X_2 X_3$		$X_1 X_2 X_3$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
00									
01									
11									
10									

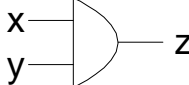
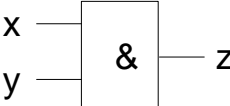
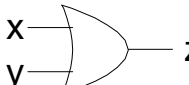
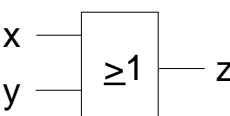
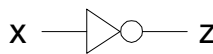
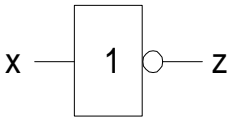


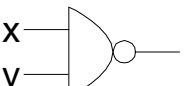
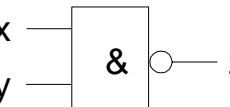
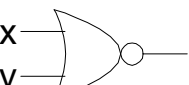
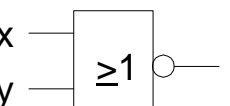
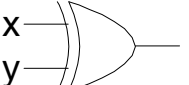
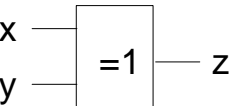
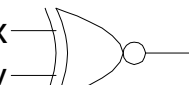
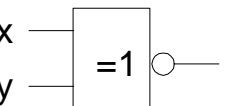
- Propiedad de adyacencia de los K-mapas.

$X_3 X_4$ \ $X_1 X_2$		$X_1 X_2$			
		00	01	11	10
00			↑		↓
01		←	A	→	
11			↓		↑
10		→		←	B

		$X_1X_2X_3$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
X_4X_5	00								
	01		A						
	11								
	10								

⇒ Representación simbólica

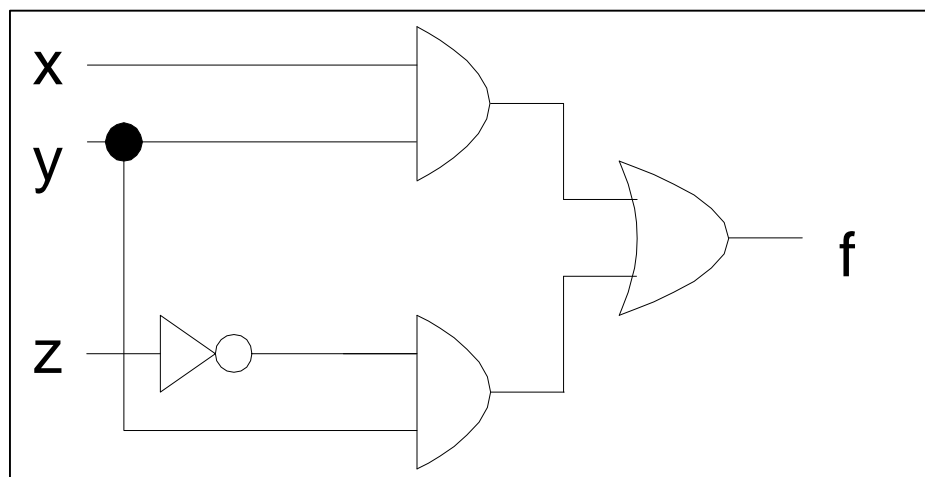
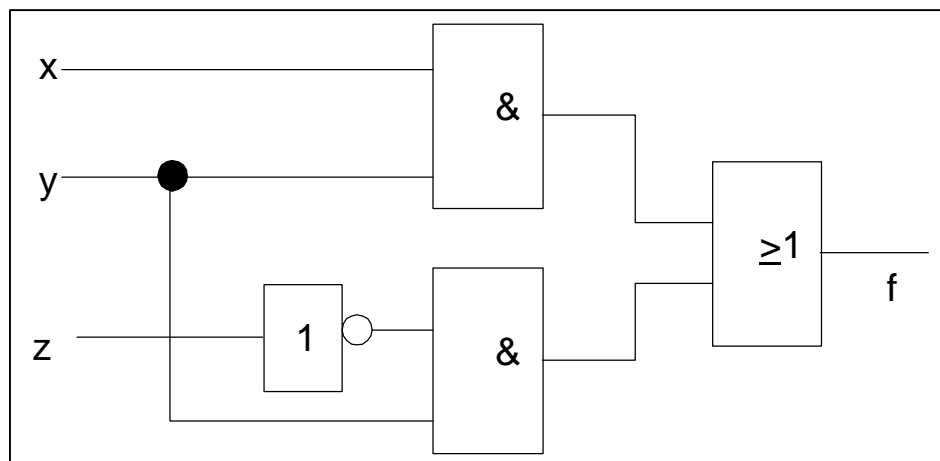
Existen símbolos gráficos que representan las funciones lógicas más comunes AND, OR, NOT, etc. En la siguiente tabla se muestran los símbolos lógicos más importantes.

Nombre	Símbolo gráfico	Símbolo IEEE	Función algebraica	Tabla de Verdad
AND			$Z = x \bullet y$	x y z
				0 0 0
				0 1 0
				1 0 0
				1 1 1
OR			$Z = x + y$	x y z
				0 0 0
				0 1 1
				1 0 1
				1 1 1
NOT			$Z = x'$	x z
				0 1
				1 0
Seguidor o BUFFER			$Z = x$	x z
				0 0
				1 1
NAND			$Z = (x \bullet y)'$	x y z
				0 0 1
				0 1 1
				1 0 1
				1 1 0
NOR			$Z = (x + y)'$	x y z
				0 0 1
				0 1 0
				1 0 0
				1 1 0
EXOR			$Z = x \oplus y$	x y z
				0 0 0
				0 1 1
				1 0 1
				1 1 0
NEXOR			$Z = (x \oplus y)'$	x y z
				0 0 1
				0 1 0
				1 0 0
				1 1 1

La representación simbólica de las funciones de conmutación se consigue simplemente conectando gráficamente las entradas y salidas de estos símbolos.

Ejemplo :

Sea la función de conmutación $f = x \bullet y + z' \bullet y$, su representación simbólica sería:



7. PRIMITIVAS LÓGICAS: CONJUNTOS COMPLETOS

Un conjunto de operadores, como por ejemplo (AND,OR,NOT) constituye un **conjunto completo** cuando, con dichos operadores, se puede implementar cualquier función de conmutación.

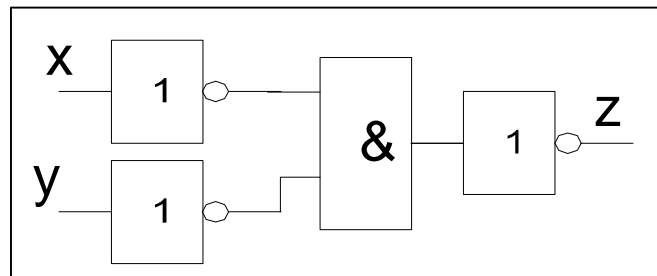
*Si las variables de una función de conmutación o variables de entradas se disponen o **todas complementadas** o **todas sin complementar** se dice que dichas variables están en raíl simple. Si estas variables se disponen complementadas y sin complementar, se dice que están en doble raíl.*

El conjunto de operadores formado por (AND,OR) forma un conjunto completo si las variables se disponen en doble raíl.

Existen otros ejemplos de grupos completos como (AND,NOT) o (OR,NOT) o (NAND) o (NOR).

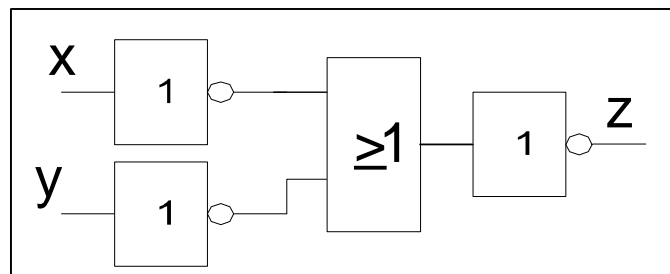
- *Demostración de que (AND,NOT) forma un conjunto completo*

Sólo bastaría con construir un operador OR a partir de estos



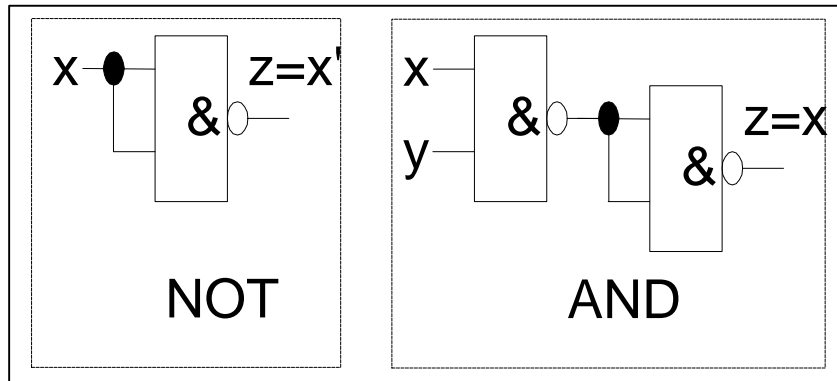
- *Demostración de que (OR,NOT) forma un conjunto completo*

Bastaría con obtener el operador AND a partir de estos.



- *Demostración de que (NAND) forma un conjunto completo*

Bastaría con obtener el operador NOT y AND.



- *Demostración de que (NOR) forma un conjunto completo*

Bastaría con obtener el operador NOT y OR.

